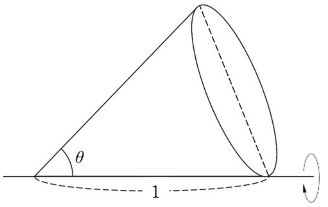
解答・解説 —図形・求積—

1. 頂点及び底面の直径を含む平面で切断したときの断面が，頂角 θ $(0<\theta<\pi)$，等辺 1 の二等辺三角形となる直円錐がある．この直円錐を母線の 1 つを軸に一回転させたとき，直円錐の表面及び内部が通過する領域の体積 V_θ を求めよ．



解答

準備中

$$V_\theta=\frac{2\pi}{3}(1-\cos\theta)$$

解答・解説 ―図形・求積―

2. 点 O を原点とする xyz 空間において，$0 < a$ を満たす a に対して

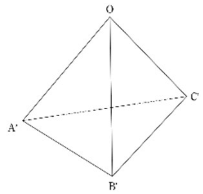
$$\overrightarrow{\mathrm{OA}} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1-a \\ 1 \end{pmatrix},\ \overrightarrow{\mathrm{OB}} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix},\ \overrightarrow{\mathrm{OC}} = \begin{pmatrix} -1 \\ a^{-1} \\ 2 \end{pmatrix} \quad \text{とする.}$$

$$\overrightarrow{\mathrm{OP}} = s\overrightarrow{\mathrm{OA}} + t\overrightarrow{\mathrm{OB}} + u\overrightarrow{\mathrm{OC}} \quad (s \geqq 0,\ t \geqq 0,\ u \geqq 0,\ s + 3t + 2u \leqq 6)$$

によって定められる点 P が存在しうる範囲を W_a とするとき，W_a の体積の最小値を求めよ.

解答

$s \geqq 0$，$t \geqq 0$，$u \geqq 0$，$s + 3t + 2u \leqq 6$ は，sty 空間では原点 O 及び点(6，0，0)，点(0，2，0)，点(0，0，3)を頂点とする四面体の表面及び内部を表す。したがって，点 P の存在しうる範囲は右図のような四面体の表面及び内部となる。ただし，A'，B'，C'はそれぞれ，$\overrightarrow{\mathrm{OA'}} = 6\overrightarrow{\mathrm{OA}}$，$\overrightarrow{\mathrm{OB'}} = 2\overrightarrow{\mathrm{OB}}$，$\overrightarrow{\mathrm{OC'}} = 3\overrightarrow{\mathrm{OC}}$を満たす点である。この体積を V とし，これを求める。三角形 A'B'C' を底面とみて，この面積と，高さに当たる点 O と平面 A'B'C' の距離を求めていく。



三角形 A'B'C' の面積を S とすると，$S = \dfrac{1}{2} \cdot \left|\overrightarrow{\mathrm{A'B'}} \times \overrightarrow{\mathrm{A'C'}}\right|$である。$\overrightarrow{\mathrm{A'B'}} \times \overrightarrow{\mathrm{A'C'}} = 6\begin{pmatrix} 6a + \frac{3}{a} - 6 \\ 9 \\ 5a - \frac{2}{a} - 2 \end{pmatrix}$。

ここで，$f(a) = (6a + \frac{3}{a} - 6)^2 + 9^2 + (5a - \frac{2}{a} - 2)^2$ とおくと，

$$S = 3\sqrt{f(a)}$$

また，平面 A'B'C' は法線ベクトルが$\begin{pmatrix} 6a + \frac{3}{a} - 6 \\ 9 \\ 5a - \frac{2}{a} - 2 \end{pmatrix}$で B'(2，2，0)を通ることから，

$(6a + \frac{3}{a} - 6)(x-2) + 9(y-2) + (5a - \frac{2}{a} - 2)z = 0$と表されるので，点 O(0，0，0)と平面 A'B'C' の距離 h は，

$$h = \frac{\left|\left(6a + \frac{3}{a} - 6\right)(0-2) + 9(0-2) + 0\left(5a - \frac{2}{a} - 2\right)\right|}{\sqrt{f(a)}} = \frac{\left|-12a - \frac{6}{a} - 6\right|}{\sqrt{f(a)}}$$

$$\therefore\ V = \frac{1}{3}Sh = \left|-12a - \frac{6}{a} - 6\right|$$

a > 0 より，$12a > 0$ かつ$\dfrac{6}{a} > 0$。よって$\left|-12a - \dfrac{6}{a} - 6\right| = 12a + \dfrac{6}{a} + 6$。相加平均と相乗平均の大小関係より，

$V = 12a + \dfrac{6}{a} + 6 \geqq 2\sqrt{12a \cdot \dfrac{6}{a}} + 6 = 12\sqrt{2} + 6$, 等号成立は $12a = \dfrac{6}{a} = 6\sqrt{2} \Leftrightarrow a = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$ のときで, これは題意を満たす。

∴ 答. $6 + 12\sqrt{2}$

解説・補足

ベクトルの外積や平面の方程式, 点と平面の距離の公式は高校範囲ではないが, $S = \frac{1}{2}\sqrt{\left|\overrightarrow{\mathrm{A'B'}}\right|^2\left|\overrightarrow{\mathrm{A'C'}}\right|^2 - \left(\overrightarrow{\mathrm{A'B'}} \cdot \overrightarrow{\mathrm{A'C'}}\right)^2}$，また平面の方程式を使わなくても$\overrightarrow{\mathrm{OH}}$（H は垂線の足）が$\overrightarrow{\mathrm{A'B'}}$と$\overrightarrow{\mathrm{A'C'}}$の一次結合で表せることを使えば高校範囲内で求められる。なおベクトルの外積 $\boldsymbol{x} \times \boldsymbol{y}$ は，$\boldsymbol{x}$ から $\boldsymbol{y}$ への右ねじの向きに，$\boldsymbol{x}$ と $\boldsymbol{y}$ が張る平行四辺形の面積と同じ（数字の）長さだけ伸びるベクトルを表す（したがって，一般に $\boldsymbol{x} \times \boldsymbol{y} \neq \boldsymbol{y} \times \boldsymbol{x}$）。

解答・解説 —図形・求積—

3. $a<0$ または $1<a$ とする．2 つのベクトル $\boldsymbol{x}=(a,\ 4(a-1)^{-1})$，$\boldsymbol{y}=(-9a^{-1},\ a-1)$ が張る平行四辺形の面積の最小値及びそのときの a の値を求めよ．

解答

$\boldsymbol{y}=\boldsymbol{0}$ となるような a の値や，$\boldsymbol{x}=k\boldsymbol{y}\,(k\in\mathbb{R})$ が成立するような a の値は存在しないので，$a<0$ または $1<a$ を満たすすべての a で平行四辺形が存在する。

平行四辺形の面積は，$\left|\boldsymbol{x}\times\boldsymbol{y}\right|=\left|a(a-1)+36\{a(a-1)\}^{-1}\right|$

$a<0$ または $1<a$ であるから，$a(a-1)>0$。したがって，相加平均と相乗平均の大小関係より，

$a(a-1)+36\{a(a-1)\}^{-1}\geqq 2\sqrt{36}=12$　等号成立は，$a(a-1)=6\Leftrightarrow a=-2,\ 3$ のとき。これは題意を満たす。

∴ 答．最小値 12，そのときの a の値 -2，3

解説・補足

問題文の記述から，平行四辺形が存在することを断定してしまうならば最初の 1 文は不要。

ベクトルの外積は高校範囲ではないが，平行四辺形の面積 $S=\sqrt{|\boldsymbol{x}|^2|\boldsymbol{y}|^2-(\boldsymbol{x}\cdot\boldsymbol{y})^2}$ を使えば高校範囲内で求められる。

なお，ベクトルの表記法として本問では太字 $\boldsymbol{x}$，$\boldsymbol{y}$ を用いているが，高校数学では普通 $\overrightarrow{x}$，$\overrightarrow{y}$ が用いられる。前者の記法の場合，ベクトルの大きさ（***ノルム****）は単に x（細字）または $|\boldsymbol{x}|$，$\|\boldsymbol{x}\|$ と表記する。後者の記法の場合は $|\overrightarrow{x}|$，または $\|\overrightarrow{x}\|$ と表記する。前者の記法では，零ベクトルは $\boldsymbol{O}$（大文字オーのイタリック体太字）や $\mathbf{0}$（数字の零の太字）で表される。

*「***ノルム***」のことを「**絶対値**」と表現するのは必ずしも正確ではないが，「原点からの距離」という点で本質は同じなので，意味上は問題ない。